

UNIDAD: ÁLGEBRA Y FUNCIONES
RAÍCES – FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

DEFINICIÓN 1: Toda expresión de la forma: $\sqrt[n]{a}$ se denominará "raíz enésima" de **a**, donde **a** es la llamada **cantidad subradical** y **n** es el **índice de la raíz**.

Para que $\sqrt[n]{a}$ esté definida en el conjunto de los reales es necesario que se cumpla lo siguiente:

DEFINICIÓN 2: Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real no negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b**, no negativo, tal que $b^n = a$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, b \geq 0$$

DEFINICIÓN 3: Si **n** es un entero impar positivo y **a** es un real cualquiera, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el único real **b** tal que $b^n = a$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, b \in \mathbb{R}$$

OBSERVACIONES:

- * Si **n** es un entero par positivo y **a** es un real negativo, entonces $\sqrt[n]{a}$ **NO ES REAL**.
- * La expresión $\sqrt[n]{a^k}$, con **a** real no negativo, se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

*

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ para todo número real}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt{-81} =$

- A) 9
- B) -9
- C) ± 9
- D) no es un número real
- E) ninguna de las anteriores

2. $-(3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}) =$

- A) $2\sqrt{5}$
- B) $-2\sqrt{5}$
- C) 0
- D) $5\sqrt{5}$
- E) $-5\sqrt{5}$

3. $(\sqrt{9} - \sqrt{36})^2 =$

- A) -3
- B) -9
- C) 9^2
- D) 3^2
- E) 9^2

4. Si $a = -5$ y $b = 3$, entonces $\sqrt[3]{a - b} =$

- A) -2
- B) 2
- C) 3
- D) 8
- E) No existe en los reales

5. $\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (3\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2} =$

- A) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
- B) $\sqrt{b} - \sqrt{a}$
- C) $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$
- D) $2(\sqrt{b} - \sqrt{a})$
- E) $-2\sqrt{a}$

6. $\frac{(\sqrt{0,64} - \sqrt{0,0025}) - 1}{-0,25} =$

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 0,75
- E) 0,25

PROPIEDADES

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ están definidas en IR, entonces:

*** MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

*** DIVISIÓN DE RAÍCES DE IGUAL ÍNDICE**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$

EJEMPLOS

1. $(\sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{32})^3 =$

- A) 216
- B) 126
- C) 36
- D) 18
- E) 6

2. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} \cdot \frac{8}{\sqrt[3]{125}} : \frac{2}{45} =$

- A) $\frac{81}{3}$
- B) $\frac{4}{27}$
- C) $\frac{1}{27}$
- D) $\frac{1}{3}$
- E) $\frac{27}{4}$

3. Si $\sqrt{8} \approx 3$, entonces el valor de $\frac{\sqrt{200} - \sqrt{16}}{\sqrt{72}}$ es aproximadamente
- A) 4
 - B) 3
 - C) 1
 - D) 0
 - E) -1
4. Si $a = \sqrt{18} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{63} + \sqrt{7}$ y $c = \sqrt{45} + \sqrt{5}$ entonces se cumple que
- A) $a > b > c$
 - B) $a > c > b$
 - C) $b > a > c$
 - D) $b > c > a$
 - E) $c > a > b$
5. Si $a = \sqrt{3}$ y $b = 1 - \sqrt{3}$, entonces $(a + b)^2 =$
- A) 0
 - B) $1 - 2\sqrt{3}$
 - C) $-4\sqrt{3}$
 - D) 12
 - E) 1
6. Si $a=11$ y $b=2$, entonces $\sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$
- A) 3
 - B) 9
 - C) 13
 - D) 16
 - E) $13 + 2\sqrt{11}$

PROPIEDADES

Si $a \in \mathbb{R}^+$, m y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

* **POTENCIA DE UNA RAÍZ**

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

* **RAÍZ DE UNA RAÍZ**

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[6]{81^3} =$

- A) 9
- B) -9
- C) 3
- D) 3^6
- E) 3^0

2. $\sqrt{\sqrt{16}} =$

- A) -2
- B) 2^2
- C) 0
- D) 2
- E) 2^4

3. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} : \sqrt[4]{16-2^4} =$

- A) 0
- B) 2
- C) 4
- D) 8
- E) No está definido

4. $-\sqrt[3]{\sqrt{-3^6}} =$

- A) No existe en los reales.
- B) 0
- C) 3
- D) -3
- E) $\sqrt[5]{729}$

5. El resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{500}} =$

- A) Es igual a 2
- B) Es menor que 1
- C) Es menor que 0
- D) Es menor que 2
- E) Es mayor que 0 y menor que 1

6. Si $a < 0 < b$, entonces $\sqrt{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)} =$

- A) $(a + b)$
- B) \sqrt{ab}
- C) $\sqrt{2ab}$
- D) $2\sqrt{ab}$
- E) No pertenece a los reales

7. Si x e y son enteros positivos y $n > 2$, entonces $\sqrt[n-1]{\frac{xy}{\sqrt[n]{xy}}} + \sqrt[n]{xy}$ es igual a

- A) 2
- B) $\sqrt[n]{xy}$
- C) $2\sqrt[n]{xy}$
- D) $\sqrt[n-1]{xy}$
- E) $2xy$

PROPIEDADES

*** AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DEL ORDEN DE UNA RAÍZ**

$$\sqrt[n]{a} = m\sqrt[n]{a^m}, m \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}^+$$

*** PRODUCTO DE RAÍCES DE DISTINTO ÍNDICE**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = m\sqrt[n]{a^m \cdot b^n}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

*** FACTOR DE UNA RAÍZ COMO FACTOR SUBRADICAL**

$$b \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}, b \in \mathbb{R}^+$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt[15]{8} =$

- A) $\sqrt[8]{2}$
- B) $\sqrt[13]{2}$
- C) $\sqrt{2}$
- D) $\sqrt[5]{2}$
- E) $\sqrt[5]{2^2}$

2. $2\sqrt[3]{2} =$

- A) $\sqrt[3]{2 \cdot 2}$
- B) $\sqrt[3]{4 \cdot 2}$
- C) $\sqrt[3]{16}$
- D) $\sqrt{16}$
- E) $\sqrt[3]{2 \cdot 3}$

3. $\sqrt[3]{-8} \cdot 2\sqrt[5]{2} =$

- A) $-\sqrt[5]{2^7}$
- B) $\sqrt[5]{6}$
- C) $\sqrt[5]{2^{11}}$
- D) $-\sqrt[5]{2^6}$
- E) $-\sqrt[5]{2^{11}}$

4. $5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} =$

- A) $4\sqrt[3]{16}$
- B) $8\sqrt[3]{16}$
- C) $4\sqrt[3]{2}$
- D) $4\sqrt[3]{4}$
- E) $8\sqrt[3]{8}$

5. Si $y > 0$, entonces $5\sqrt[3]{54y^3} - 2y\sqrt[3]{250} + 7\sqrt[3]{16y^3} =$

- A) $39y\sqrt[3]{2}$
- B) $9y\sqrt[3]{2}$
- C) $10y\sqrt[3]{2}$
- D) $19y\sqrt[3]{2}$
- E) $11y\sqrt[3]{2}$

6. Si $a = \sqrt[3]{m^5}$ y $b = \sqrt{2n^3}$, ambas definidas en los reales positivos, ¿cuál de las siguientes alternativas es verdadera?

- A) $\frac{a}{b} = \sqrt[5]{\frac{m^{10}}{8n^9}}$
- B) $\frac{a}{b} = \sqrt[6]{\frac{m^{10}}{8n^9}}$
- C) $\frac{b}{a} = \sqrt[5]{\frac{m^{10}}{4n^6}}$
- D) $\frac{b}{a} = \sqrt[6]{\frac{m^{10}}{8n^9}}$
- E) $\frac{a}{b} = \sqrt[5]{\frac{m^{10}}{2n^9}}$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente cuyo denominador no contenga ninguna raíz.

CASO 1: Fracciones de la forma $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ | **CASO 2:** Fracciones de la forma $\frac{a}{p\sqrt{b} + q\sqrt{c}}$

EJEMPLOS

1. $\frac{54}{3\sqrt{3}} =$

- A) $54\sqrt{3}$
- B) $8\sqrt{3}$
- C) $6\sqrt{3}$
- D) $3\sqrt{3}$
- E) $\sqrt{3}$



2. $\frac{7}{\sqrt{20} - \sqrt{27}} =$

- A) $-2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$
- B) $-14\sqrt{5} - 21\sqrt{3}$
- C) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$
- D) $-2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$
- E) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

3. Para racionalizar la expresión $\frac{x}{\sqrt[n]{x^m}}$ se debe amplificar por

- A) $\sqrt[n]{x^{m-n}}$
- B) $\sqrt[n]{x^n}$
- C) $\sqrt[n]{x^{m+n}}$
- D) $\sqrt[n]{x^{n-m}}$
- E) $\sqrt[n]{x^m}$

4. ¿Cuál (es) de las siguientes expresiones representa(n) la mitad del cuadrado de $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$?

- I) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2}{2}$
- II) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$
- III) $4 + \sqrt{15}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III

5. $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{\sqrt{a - b}}$ es equivalente a:

- I) $a\sqrt{a - b} - b\sqrt{a - b}$
- II) $(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
- III) $(a - b)\sqrt{a - b}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III

6. $\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{mn^2} =$

- A) $\frac{\sqrt[3]{n}}{n}$
- B) $\frac{m\sqrt[3]{n}}{n}$
- C) $\frac{\sqrt[3]{n}}{mn}$
- D) $\frac{\sqrt[3]{m}}{mn}$
- E) $\frac{\sqrt[3]{mn}}{n}$

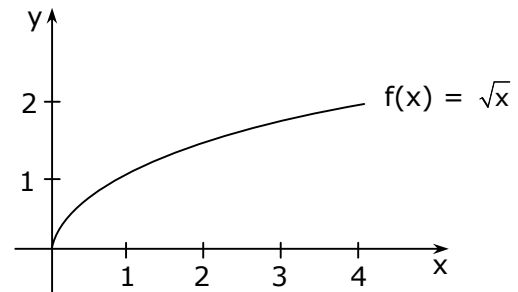
FUNCIÓN RAÍZ

Si x es un número real no negativo, se define la función raíz cuadrada de x por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Su representación gráfica es

x	$f(x)$
0	0
0,5	0,70..
1	1
1,5	1,22..
2	1,41..
2,5	1,58..
3	1,73..
3,5	1,87..
4	2

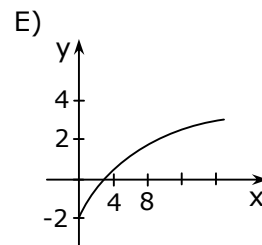
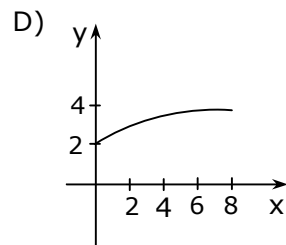
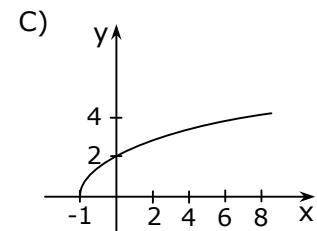
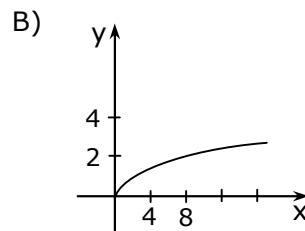
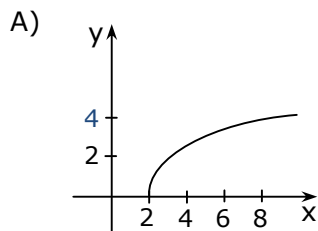


OBSERVACIONES:

- * La función es creciente.
- * La función raíz cuadrada es considerada como un modelo de crecimiento lento.

EJEMPLOS

1. El gráfico que mejor representa a la función $f(x) = \sqrt{x} - 2$, es



2. ¿Cuál de las siguientes funciones está mejor representada por el gráfico de la fig.1?

- A) $f(x) = \sqrt{x+3} - 5$
- B) $f(x) = \sqrt{x+5} - 3$
- C) $f(x) = \sqrt{x-3} - 5$
- D) $f(x) = \sqrt{x+3} + 5$
- E) $f(x) = \sqrt{x-3} + 5$

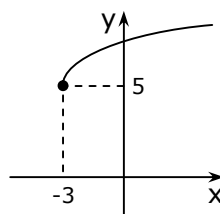
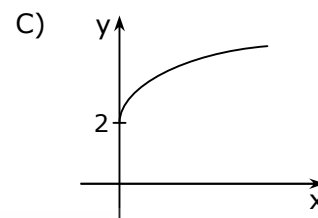
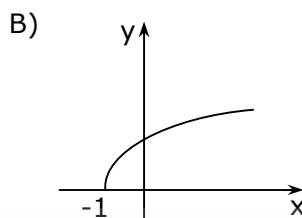
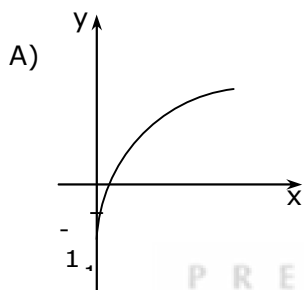


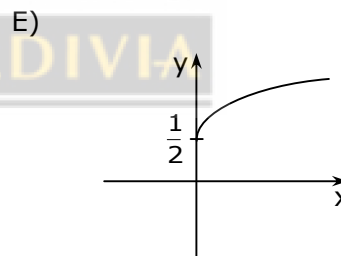
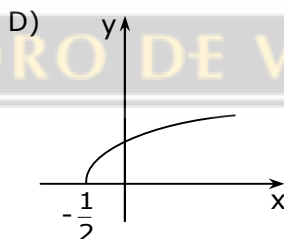
fig.1

3. ¿Cuál de las siguientes opciones representa mejor al gráfico de $f(x) = \sqrt{x + 0,5}$?



PREUNIVERSITARIO

PEDRO DE VALDIVIA



4. Si $f(x) = \sqrt{x} + 2$ entonces el valor de **m** en la ecuación $f(m) - 2 - 3f(m) = -10$, es

- A) 0
- B) -2
- C) 2
- D) -4
- E) 4

EJERCICIOS

1. $\sqrt[3]{\frac{125}{512}} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$

- A) $\frac{3}{2}$
- B) $\frac{9}{8}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) $\frac{5}{8}$
- E) $\frac{1}{8}$

2. $7\sqrt[4]{a} - 5\sqrt[6]{a} + 4\sqrt[3]{a} =$

- A) $2\sqrt[12]{a}$
- B) $16\sqrt[12]{a}$
- C) $6\sqrt[12]{a}$
- D) $\sqrt[12]{a}$
- E) 0

3. $\sqrt{2\sqrt[3]{8x\sqrt{x}}} =$

- A) $4\sqrt{x}$
- B) $2\sqrt[3]{x^2}$
- C) $4x$
- D) \sqrt{x}
- E) $2\sqrt[4]{x}$

4. $(\sqrt{x}-2)(2+\sqrt{x})=$

- A) $x^2 - 4$
- B) $x - 4$
- C) $x^2 - 2x$
- D) $x^2 - 2$
- E) $4 - x$

5. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $20\sqrt{2} : \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

II) $\sqrt[3]{0,00243} = 0,3$

III) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[20]{20}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo II y III
- E) Todas ellas.

6. $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[12]{x}} =$

- A) x^3
- B) x
- C) $3x$
- D) $\sqrt[12]{x^{25}}$
- E) x^2

7. Si $m = ax^2 + a^2x + 2ax\sqrt{ax}$, entonces $\sqrt{m} =$

- A) $x\sqrt{a} + a\sqrt{x}$
- B) $(x\sqrt{a} + a\sqrt{x})^2$
- C) $2x\sqrt{a}$
- D) $2a\sqrt{x}$
- E) $2ax$

8. El valor de la expresión $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(4\sqrt{3} - 2\sqrt{5})$ es

- A) 14
- B) 10
- C) 7
- D) 2
- E) 0

9. $\frac{\sqrt{a^x} \cdot 14b\sqrt{a^{2-x}}}{7b} =$

- A) 7ab
- B) 7b
- C) 7a
- D) 2a
- E) 2ab

10. Si $(\sqrt{x} - 5)\sqrt{x} = x$, entonces $x =$

- A) 25
- B) 5
- C) 0
- D) -25
- E) -5

11. El orden decreciente de los números $a = 4\sqrt{4 \cdot \sqrt{7}}$, $b = 4\sqrt{5 \cdot \sqrt{5}}$ y $c = 4\sqrt{7 \cdot \sqrt{2}}$ es

- A) a, b, c
- B) a, c, b
- C) b, a, c
- D) c, b, a
- E) b, c, a

12. El valor de $2x$ en la ecuación $(\sqrt{x + \sqrt{81}})\sqrt{x} - x = 0$ es

- A) 0
- B) 3
- C) -3
- D) 9
- E) No existe.

13. El área de un triángulo equilátero es $16\sqrt{3}$, entonces su perímetro y su altura son respectivamente

- A) 16 y $4\sqrt{3}$
- B) 24 y $4\sqrt{3}$
- C) 48 y $8\sqrt{3}$
- D) 24 y $8\sqrt{3}$
- E) 16 y $8\sqrt{3}$

14. Si $x > 0$ y $x \neq -5$, ¿cuál es el valor de x^2 al resolver la ecuación $\sqrt{x - 5} = \frac{5}{\sqrt{x + 5}}$?

- A) 5
- B) 25
- C) $2\sqrt{5}$
- D) $\sqrt{50}$
- E) 50

15. $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) : \sqrt{\frac{1}{xy}} =$

- A) $x - y$
- B) $x + y$
- C) $y - x$
- D) $-y - x$
- E) 1

16. $\frac{\sqrt[8]{5^7+5^7+5^7+5^7+5^7}}{\sqrt{5^7+5^7+5^7+5^7}} =$

- A) 1
- B) $\frac{1}{5}$
- C) $\frac{1}{10}$
- D) $\frac{1}{25}$
- E) $\frac{1}{125}$

17. Al racionalizar la expresión $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3\sqrt{a}}}$ se obtiene

- A) $\sqrt[8]{a}$
- B) $\sqrt[8]{a^{11}}$
- C) $\sqrt[11]{a^{15}}$
- D) $\sqrt[15]{a^{11}}$
- E) $\sqrt[15]{a}$

18. $\frac{x-1}{2(\sqrt{x}-1)} =$

- A) $\frac{\sqrt{x}-1}{2}$
- B) $\frac{1-\sqrt{x}}{2}$
- C) $\frac{\sqrt{x}+1}{2}$
- D) $(\sqrt{x}-1)$
- E) $(\sqrt{x}+1)$

19. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a $\sqrt{b\sqrt[5]{b}}$

- I) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{b^{26}}}}$
- II) $\sqrt{b} \cdot \sqrt{\sqrt{b}} \cdot \sqrt[5]{b}$
- III) $\sqrt[20]{b^{11}}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) Sólo II y III

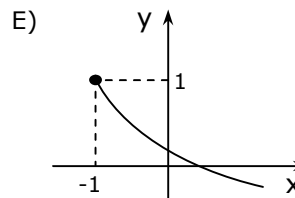
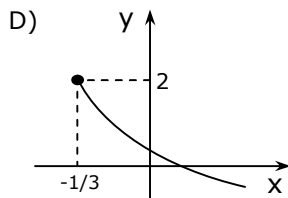
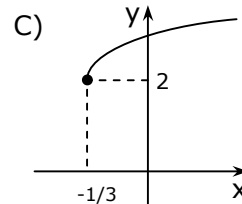
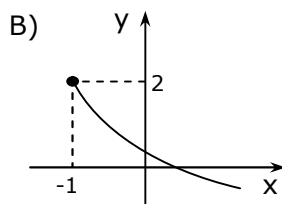
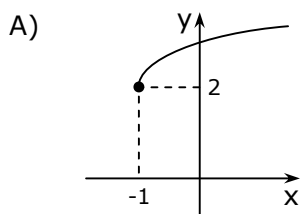
20. Si la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ se traslada de modo que queda expresada como $f(x) = \sqrt{x-2} - 3$, entonces el punto de origen de la nueva función es

- A) (-3,-2)
- B) (-3,2)
- C) (2,-3)
- D) (2,3)
- E) (-2,3)

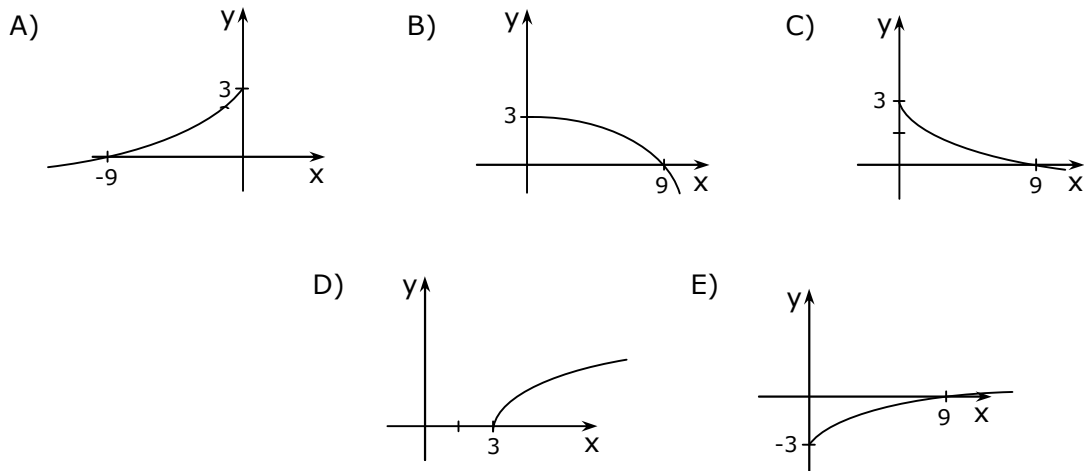
21. La gráfica de la función $f(x) = 2 - \sqrt{3x+1}$ interseca al eje x en el punto

- A) (1,0)
- B) (0,1)
- C) (0,0)
- D) (-1,0)
- E) No interseca al eje X.

22. La gráfica de la función del ejercicio anterior está representada en la figura de la alternativa



23. La gráfica de la función que es simétrica a la función $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ con respecto a la recta $y = 3$, está mejor representada en la opción



24. La cantidad de enfermos de un país después de ser afectado por una epidemia, disminuye por día, a la raíz cuadrada del día anterior. Si el número de enfermos que hay el primer día es x , entonces ¿cuántos enfermos habrá el décimo día?

- A) $^{1024}\sqrt{x}$
 B) $^{512}\sqrt{x}$
 C) $^{256}\sqrt{x}$
 D) $^{81}\sqrt{x}$
 E) $\sqrt[9]{x^2}$

25. Con la diagonal de un rectángulo cuyo ancho x es la mitad del largo, se construye otro rectángulo de largo igual a dicha diagonal. ¿Cuál es la diferencia positiva de sus respectivas áreas, si se conserva el ancho del primer rectángulo?

- A) x^2
 B) $2x^2$
 C) $x^2 (4 - \sqrt{5})$
 D) $x^2 (\sqrt{5} - 2)$
 E) $x^2 (2 - \sqrt{5})$

26. Se puede determinar el valor numérico de **a** en la función $f(x) = \sqrt{x+3} + a$ si:

- (1) $f(1) = 4$
- (2) $f(-3) = a$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

27. La expresión $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{2x-3}}$ es número real si:

- (1) x toma cualquier valor real.
- (2) $x < 2$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

28. Se verifica la igualdad $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{x^{18}}{y^6}}$ si:

- (1) $ay^3 = bx^9$
- (2) $a > 0, b > 0$ e $y > 0$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

29. El gráfico de la figura 1, corresponde a la función: $f(x) = \sqrt{3x + 6} + b$ si:

- (1) $b = 7$
- (2) $f(1) = 10$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

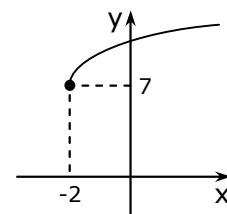


fig.1

30. La expresión $\frac{1}{\sqrt[n]{a^4}\sqrt{a}}$ es un número real si :

- (1) **n** es un número impar y **a** es cualquier valor entero.
 (2) **a** es mayor que cero.
- A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
 C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3	4	5	6	7
1 y 2	D	C	D	A	B	C	
3 y 4	A	A	C	D	E	A	
5 y 6	A	D	E	A	D	E	C
7 y 8	D	C	E	A	D	B	
9 y 10	C	A	D	D	D	A	
11 y 12	E	D	D	E			

EJERCICIOS PÁG. 13

1. B	11. C	21. A
2. C	12. A	22. D
3. E	13. B	23. C
4. B	14. E	24. B
5. B	15. B	25. D
6. E	16. E	26. A
7. A	17. D	27. E
8. A	18. C	28. C
9. D	19. C	29. D
10. C	20. C	30. B

DMDOMA28

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web
<http://www.pedrovaldivia.cl/>