Curso: Matemática

PREUNIVERSITARIO PEDRO DE VALDIVIA

Material N° 33

GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 25

UNIDAD: GEOMETRÍA
GEOMETRÍA PROPORCIONAL II

TEOREMAS DE EUCLIDES

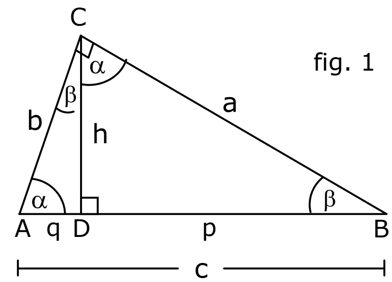


fig. 1

El triángulo de la figura 1 es rectángulo en C y $\overline{CD}$ es altura.

a y **b**: catetos

c: hipotenusa

p y **q**: proyecciones de los catetos **a** y **b**, respectivamente.

Los triángulos ACB, ADC y CDB son semejantes.

- **Referente a la altura:** En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre las **proyecciones** de los catetos sobre la hipotenusa.

$$\boxed{h_c^2 = p \cdot q}$$

- **Referente a los catetos:** En todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la **proyección** de dicho cateto sobre la hipotenusa.

$$\boxed{a^2 = p \cdot c} \qquad \boxed{b^2 = q \cdot c}$$

EJEMPLOS

1. En el triángulo ABC de la figura 2, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CB}$. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{DB}$?

   A) 8
   B) 10
   C) 12
   D) 16
   E) 18

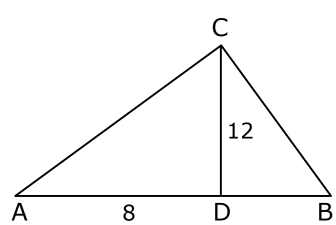


fig. 2

2. Sea el triángulo ABD de la figura 3 rectángulo en A. Si $\overline{AC}$ es altura, $\overline{DB} =$

   A) 9
   B) 9,5
   C) 10
   D) 12
   E) 13

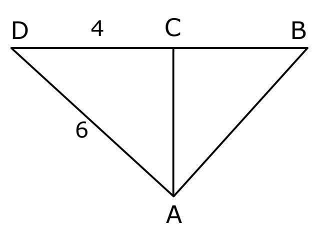


fig. 3

3. Si el triángulo ABC de la figura 4 es rectángulo en C, entonces la medida de $\overline{CD}$ es:

A) 4
B) 6
C) 12
D) 16
E) Falta información.

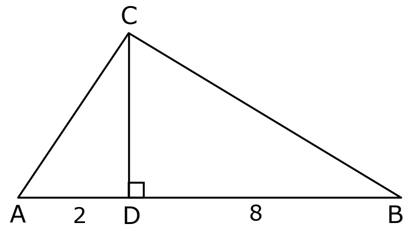


fig. 4

4. En el triángulo ABC, rectángulo en C, de la figura 5, $\overline{CD}$ es altura ¿Cuál de los siguientes pares de datos son posibles valores para $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$?

A) 25 y 25
B) 5 y 10
C) 5 y 4
D) 10 y 10
E) 10 y $\sqrt{10}$

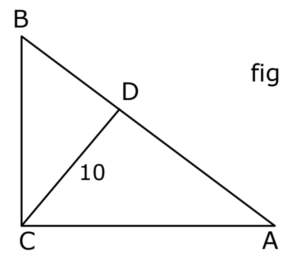


fig. 5

5. En el triángulo ABC rectángulo en C de la figura 6, la proyección del cateto menor es:

A) $2\sqrt{13}$
B) $3\sqrt{13}$
C) 4
D) 6
E) 9

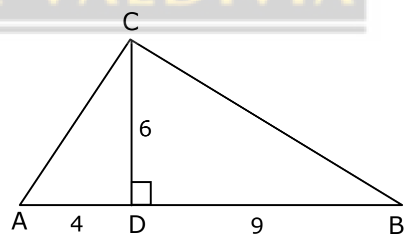


fig. 6

6. En el triángulo rectángulo en C de la figura 7, $\overline{CD}$ es altura, entonces $\overline{CD}$ mide:

A) $\frac{7}{5}$
B) 5
C) $\frac{12}{5}$
D) $\frac{12}{3}$
E) $5\sqrt{5}$

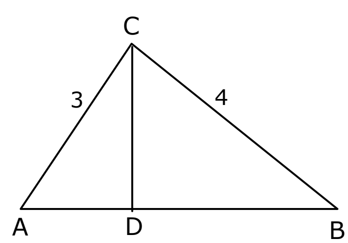
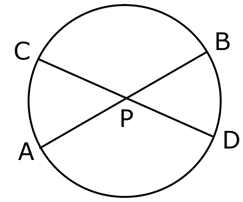


fig. 7

PROPORCIONALIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA

Teorema de las cuerdas

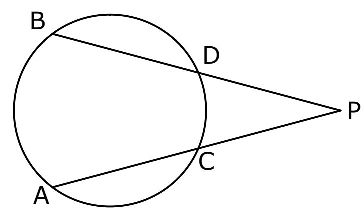
Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan en el interior de ella, el producto de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de segmentos determinados en la otra.



$$\boxed{\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}}$$

Teorema de las secantes

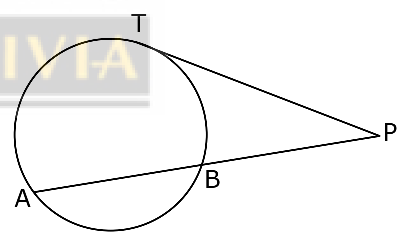
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.



$$\boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}}$$

Teorema de la tangente y la secante

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante y su segmento exterior.



$$\boxed{\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}}$$

EJEMPLOS

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1 $\overline{DB} \perp \overline{CA}$. Si $\overline{EB} = 10$ cm y $\overline{CE} = 5$ cm, entonces, ¿cuánto mide el diámetro $\overline{CA}$?

   A) 10 cm
   B) 15 cm
   C) 20 cm
   D) 25 cm
   E) 30 cm

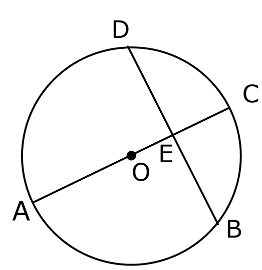


fig. 1

2. En la circunferencia de la figura 2, la secante $\overline{PC}$ mide 10 cm, $\overline{PB}$ también es secante y $\overline{PA}$ = 4 cm. Si $\overline{DC}$ = 2 cm, entonces $\overline{PB}$ mide

A) 16 cm
B) 17 cm
C) 20 cm
D) 36 cm
E) 80 cm

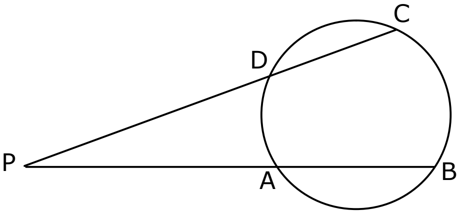


fig. 2

3. Sea la circunferencia de centro O de la figura 3. Si $\overline{PT}$ es tangente en T, entonces el radio de la circunferencia es:

A) 2 cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) 6 cm
E) 8 cm

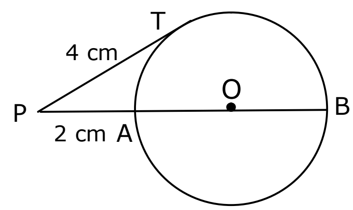


fig. 3

4. En la circunferencia de la figura 4, $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ son cuerdas. Si $\overline{DP}$ =10 cm, $\overline{AP}$ = 4 cm y $\overline{PC}$ =5 cm, entonces $\overline{PB}$ =

A) 2 cm
B) 4 cm
C) 5 cm
D) 7 cm
E) 10 cm

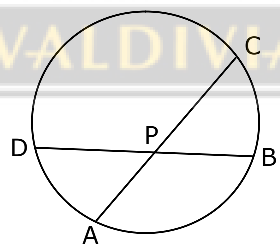


fig.4

5. Sea $\overline{TP}$ tangente en T a la circunferencia de centro O de la figura 5. Si $\overline{PC} = 2\overline{CA}$ y $\overline{TP}$ =12 cm, entonces $\overline{PC}$ =

A) $4\sqrt{3}$ cm
B) $6\sqrt{2}$ cm
C) 12 cm
D) $12\sqrt{2}$ cm
E) 24 cm

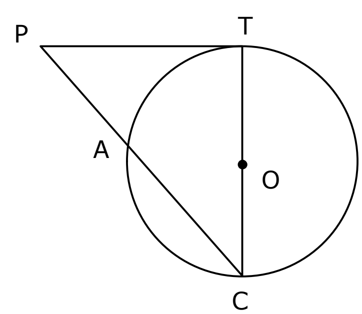


fig. 5

DIVISIÓN DE TRAZOS

⁕ DIVISIÓN INTERNA

Un punto P perteneciente a un trazo AB lo divide en la razón m:n, si $\overline{AP} : \overline{PB}$ = m:n

$$\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}}$$

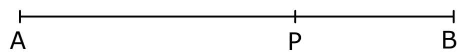


fig. 1

⁕ DIVISIÓN ÁUREA O DIVINA

Dividir un trazo en sección áurea o divina, consiste en dividirlo en dos segmentos, de modo que la razón entre el trazo entero y el segmento mayor sea igual a la razón entre el segmento mayor y el menor.

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}}$$

$(\overline{AP} > \overline{PB})$

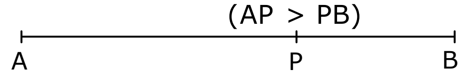


fig. 2

OBSERVACIÓN: La razón $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$ se denomina RAZÓN ÁUREA, y su valor es el NÚMERO ÁUREO:

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618034}$$

EJEMPLOS

1. Un trazo de 24 cm ha sido dividido en dos partes razón de 3:5. Entonces el trazo menor mide

   A) 3 cm
   B) 4,8 cm
   C) 5 cm
   D) 9 cm
   E) 15 cm

2. Si un segmento de 40 cm se ha dividido en razón aurea, entonces el trazo mayor mide

   A) $20(\sqrt{5}-1)$
   B) $\pm 20(\sqrt{5}-1)$
   C) $20(\sqrt{5}+1)$
   D) $20\sqrt{5}$
   E) Falta información

3. El trazo $\overline{AJ}$ se ha dividido en 9 partes congruentes, tal como se muestra en la figura 3. Es correcto afirmar entonces que:

I) $\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{BJ}}$

II) D divide a $\overline{AJ}$ en razón aurea

III) $\dfrac{\overline{AI}}{AD} = \dfrac{\overline{BJ}}{BD}$

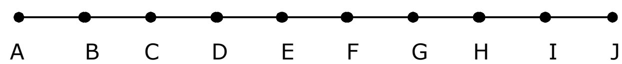


Fig.3

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

4. Sea $\overline{AB}$ un trazo de 50 cm que se ha dividido en dos partes por el punto P como se muestra en la figura 4. La razón entre el segmento menor y el mayor es:

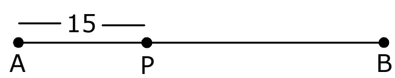


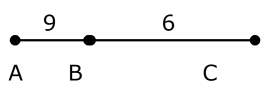
fig. 4

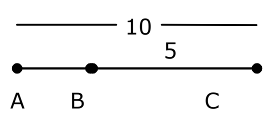
A) 3:5
B) 3:7
C) 7:3
D) 7:10
E) 4:5

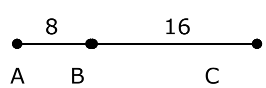
5. En el ejercicio anterior, la razón entre el segmento mayor y $\overline{AB}$ es:

A) 3:5
B) 3:7
C) 7:3
D) 7:10
E) 4:5

6. ¿Cuál(es) de los siguientes trazos se ha(n) dividido en la razón 3:2?

I) 

II) 

III) 

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo II y III
D) Todos
E) Ninguno

EJERCICIOS

1. En el triángulo ABC de la figura 1, rectángulo en C. Si h es altura, entonces es correcto afirmar que:

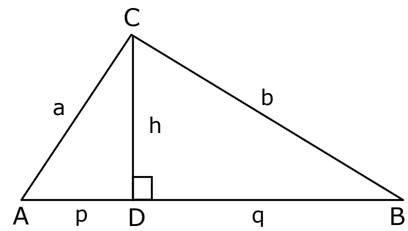


fig. 1

A) $p+h = a^2$
B) $b^2 = q(p+q)$
C) $ab = p+q$
D) $ap = q$
E) Todas son verdaderas.

2. En la figura 2, ABD es un triángulo rectángulo en A y $\overline{AC}$ es altura. De acuerdo a los datos de la figura, el perímetro del triángulo ABD es

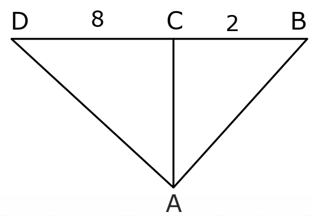


fig. 2

A) $20\sqrt{5}$ cm
B) 30 cm
C) 36 cm
D) $(4\sqrt{5}+10)$ cm
E) $(6\sqrt{5}+10)$ cm

3. En la circunferencia de centro O de la figura 3, $\overline{PD}$ y $\overline{PA}$ son secantes. Si $\overline{AP}=16$ cm, $\overline{CP}=8$ cm y $\overline{BP}=6$ cm, entonces, la medida de $\overline{DC}$ es

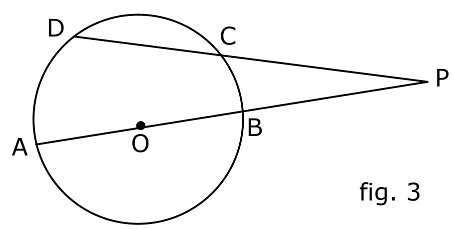


fig. 3

A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 10 cm
E) 12 cm

4. En el triángulo ACD de la figura 4, $\overline{AD}\perp\overline{DC}$, $\overline{DB}$ es altura, si $\overline{BC}=2$ cm y $\overline{DB}=4$ cm, el área del triángulo ACD es

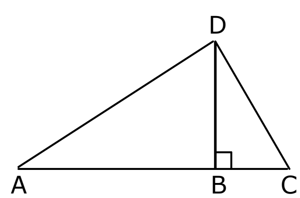


fig. 4

A) $16\ cm^2$
B) $20\ cm^2$
C) $24\ cm^2$
D) $28\ cm^2$
E) $32\ cm^2$

5. El segmento $\overline{PQ}$ de la figura 5, se ha dividido en razón aurea por el punto R. Si $\overline{PR}$ es el segmento menor y mide $\sqrt{5}$ - 1, entonces $\overline{RQ}$ mide

A) $2\sqrt{2}$ cm
B) $2\sqrt{2}$ cm
C) 2 cm
D) $3\sqrt{2}$ cm
E) 4 cm

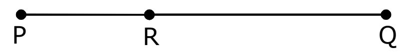


fig. 5

6. En la circunferencia de centro O y radio 4 de la figura 6, se ha inscrito el triángulo ABC, si $\overline{CD}$ = 1 y es altura, entonces la multiplicación de las proyecciones de los catetos y la suma de ellas es respectivamente:

A) 1 y 8
B) 8 y 1
C) 4 y 4
D) 16 y 4
E) 16 y 8

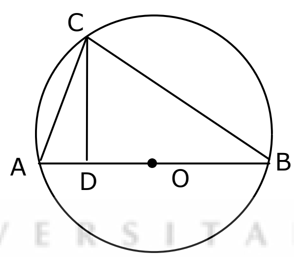


fig. 6

7. En la circunferencia de centro O de la figura 7, $\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{CB}$ tangente en B. Si el triángulo ABC es isósceles, entonces $\overline{CD}$ mide:

A) 2 cm
B) $2\sqrt{2}$ cm
C) $2\sqrt{10}$ cm
D) 4 cm
E) $4\sqrt{2}$ cm

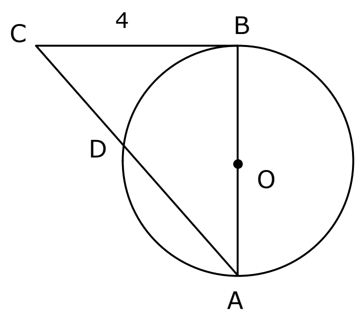


fig. 7

8. ¿En qué razón están los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, $\overline{AP} > \overline{PB}$, de la figura 8, si su suma es 36 cm y su diferencia es 4 cm?

A) 4:1
B) 5:4
C) 9:1
D) 9:4
E) 9:5

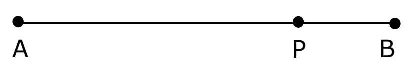


fig. 8

9. En El triángulo ABC, rectángulo en C, de la figura 9, $\overline{CD}$ es altura y $\overline{CB} = 2\ \overline{DB} = 8$ cm, entonces $\overline{AB}$ mide:

A) 8 cm
B) $8\sqrt{2}$ cm
C) $8\sqrt{3}$ cm
D) 12 cm
E) 16 cm

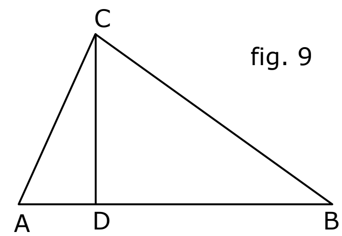


fig. 9

10. En un trazo $\overline{AB}$ un punto P lo divide en razón aurea, tal que $\overline{AP} < \overline{PB}$. Si $\overline{AB} = 13$ cm y $\overline{PB}$ = x, entonces, la ecuación para determinar x es:

A) $x^2 - 13x - 169 = 0$
B) $x^2 + 13x - 169 = 0$
C) $x^2 + 13x + 169 = 0$
D) $x^2 - 13x + 169 = 0$
E) $x^2 - 13x + 169 = 0$

11. Las proyecciones de los catetos del triángulo ABC rectángulo en C de la figura 10, con $\overline{CD}$ altura son:

A) 1,2 y 1,6
B) 3,6 y 6,4
C) 6 y 8
D) 8 y 10
E) 6,5 y 8,5

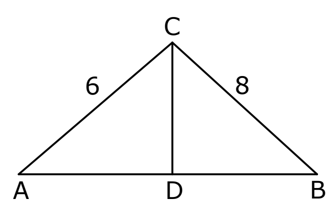


fig. 10

12. El área triángulo ADC de la figura 10 es:

A) 8,64
B) 8,82
C) 10
D) 10,8
E) 12,5

13. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **siempre** verdadera(s) con respecto al triángulo ABC, rectángulo en B de la figura 11, donde $\overline{BD}$ es altura?

I) $\overline{AD} = 2$ cm
II) $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$ cm
III) El triángulo ABC es escaleno

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

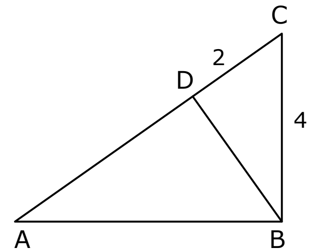


fig. 11

14. ¿Cuál es el área del triángulo ABC, de la figura 12, si $\overline{AC}$ es tangente en C?

A) 32 cm
B) $36\sqrt{2}$ cm
C) 38 cm
D) $38\sqrt{2}$ cm
E) 64 cm

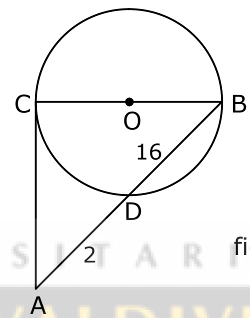


fig. 12

15. En el plano cartesiano se ha dibujado una recta L, tal como se muestra en la figura 13. La mínima distancia de L al origen es:

A) 2,4
B) 3
C) 3,5
D) 4
E) No se puede determinar.

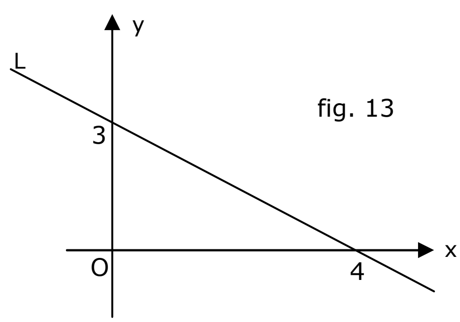


fig. 13

16. El trazo $\overline{PQ}$ de la figura 14 mide 18 cm. Si $\overline{PR} : \overline{PQ} = 2:9$, entonces la diferencia entre los segmentos $\overline{RQ}$ y $\overline{PR}$ es

A) 4 cm
B) 7 cm
C) 10 cm
D) 16 cm
E) N.A. cm

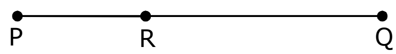


fig. 14

17. En el triángulo ABC, rectángulo en C de la figura 15, $\overline{CD} = \sqrt{14}$ cm y es altura, entonces $2x =$

A) 2 cm
B) 4 cm
C) 7 cm
D) 9 cm
E) 14 cm

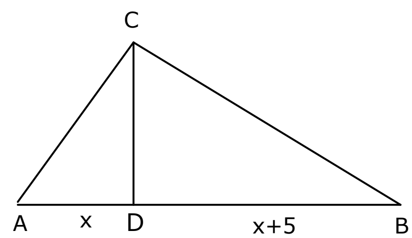


fig. 15

18. En la circunferencia de centro O y radio R de la figura 16, $\overline{PS}$ y $\overline{PQ}$ son tangentes. Si $\overline{PT} = 2$ cm, calcule el perímetro del deltoide QOSP.

A) 4+2R cm
B) 4+4R cm
C) $(2+\sqrt{R}+2R)$ cm
D) $(2\sqrt{1+R}+2R)$ cm
E) $(4\sqrt{1+R}+2R)$ cm

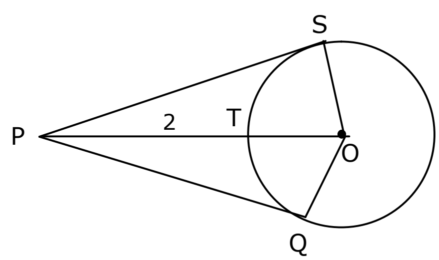


fig. 16

19. En el segmento $\overline{AB}$ de la figura 17, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ están en razón aurea, si $\overline{AC} = 4$ cm y es el segmento menor, entonces $\overline{AB}$ mide

A) 6 cm
B) 8 cm
C) $(4+2\sqrt{5})$ cm
D) $(6+2\sqrt{5})$ cm
E) 12 cm

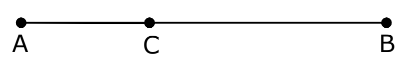


fig. 17

20. En la figura 18, ABC es un triángulo rectángulo en C. Si $\overline{CD}$ es altura y $\overline{CE}$ es transversal de gravedad, entonces, el área achurada es:

A) 17 cm^2
B) $19{,}5 \text{ cm}^2$
C) 38 cm^2
D) 39 cm^2
E) 78 cm^2

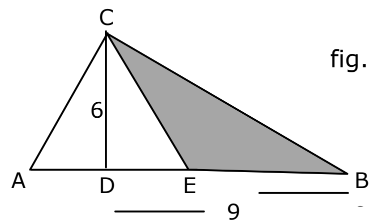


fig. 18

21. Sea BD arco de la circunferencia de centro O y radio 8 como se muestra en la figura 19. Entonces si $\overline{AB} = \overline{OA}$, $\overline{CA}$ mide:

A) $2\sqrt{8}$ cm
B) $3\sqrt{2}$ cm
C) 4 cm
D) $4\sqrt{3}$ cm
E) 8 cm

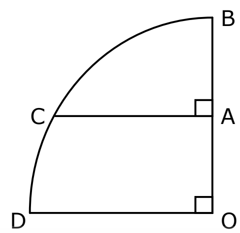


fig. 19

22. Si en la figura 20, el segmento $\overline{OQ}$ es dividido por P en razón aurea (z<y), entonces **no** se cumple que:

A) $\dfrac{x+y}{y+z} = \dfrac{x}{z}$

B) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

C) $\dfrac{xz}{y^2} = 1$

D) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$

E) $y^2 - xz = 0$

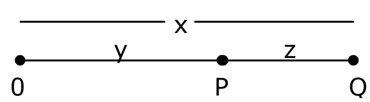


fig. 20

23. En la figura 21, PT es tangente en T a las circunferencias de centro O y O\` de radio 3 y 7 cm respectivamente. Si $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ son secantes, $\overline{PB} \cdot \overline{PA} - \overline{PD} \cdot \overline{PC} =$

A) 0 cm
B) 4 cm
C) 7 cm
D) 10 cm
E) Falta información.

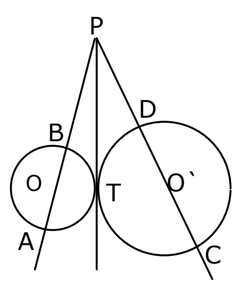


fig. 21

24. El segmento $\overline{AB}$ se ha dividido en razón aurea por P (b<c). El segmento $\overline{PB}$ se ha dividido a su vez en la misma razón por el punto R (d<e) como se muestra en la figura 22. Es correcto afirmar que:

I) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{d+e}{b}$

II) $\dfrac{a-b}{e} = \dfrac{c-d}{d}$

III) $\dfrac{c}{b} = \dfrac{e}{d}$

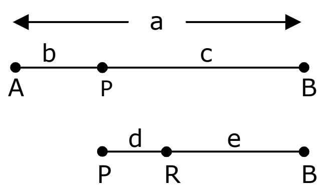


fig. 22

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) Todas

25. En la circunferencia de la figura 23, si $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{BD}$, entonces es **siempre** verdadero que:

I) ΔABC congruente ΔADC
II) $\overline{DE} = \overline{EB}$
III) ΔABC es isósceles de base $\overline{AC}$

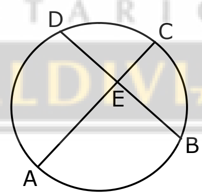


fig. 23

A) Sólo I
B) Sólo I y III
C) Sólo II y III
D) Todas
E) Ninguna de ellas

26. Sea AOB, en la figura 24, la cuarta parte de una circunferencia de centro O.
Si $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$ cm y $\overline{DB} = 2\sqrt{2}$ cm, entonces $\overline{CD} + \overline{DO} =$

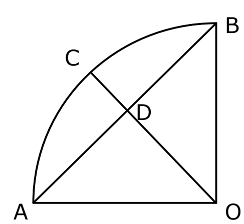


fig. 24

A) 5 cm
B) $5\sqrt{2}$ cm
C) 6 cm
D) $6\sqrt{2}$ cm
E) $(5+2\sqrt{2})$ cm

27. De acuerdo a la figura 24 de la pregunta anterior, $\overline{DO}$ mide

A) $3\sqrt{2}$ cm
B) $2\sqrt{7}$ cm
C) $4\sqrt{5}$ cm
D) $\sqrt{13}$ cm
E) No se puede determinar

28. Sea $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$ secantes a la circunferencia de centro O de la figura 25. Se puede determinar la medida de $\overline{CB}$ si:

(1) El perímetro del ΔPBC es 28 cm.
(2) $\overline{DC} = 3$ cm.

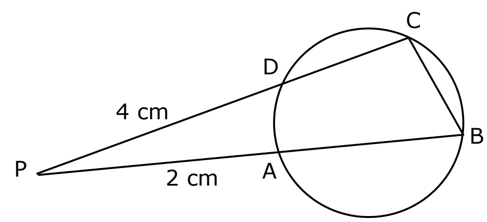


fig. 25

A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C) Ambas juntas, (1) y (2).
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2).
E) Se requiere información adicional.

29. Un segmento $\overline{AB}$ de 42 cm, se ha dividido en dos partes por un punto P. Se puede determinar la longitud del segmento menor si se conoce:

(1) En qué proporción se dividió el segmento inicial.
(2) La constante de la razón.

A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C) Ambas juntas, (1) y (2).
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2).
E) Se requiere información adicional.

30. Sea en la figura 26, $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AC} \perp \overline{DB}$. Se puede determinar la medida de $\overline{EF}$ si:

(1) $\measuredangle CGF = 45°$.
(2) $\overline{GE} \perp \overline{AB}$.

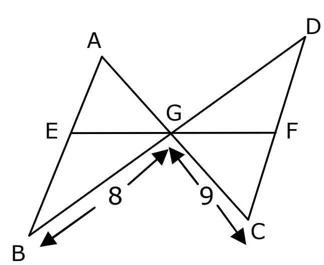


fig. 26

A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C) Ambas juntas, (1) y (2).
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2).
E) Se requiere información adicional.

RESPUESTAS

Ejemplos / Págs.	1	2	3	4	5	6
1 y 2	E	A	A	D	C	C
3 y 4	D	C	B	A	D	
5 y 6	D	A	A	B	D	A

EJERCICIOS PÁGINA 7

1. B	11. B	21. D
2. E	12. A	22. A
3. A	13. E	23. A
4. B	14. B	24. E
5. C	15. A	25. E
6. A	16. C	26. A
7. B	17. B	27. D
8. B	18. E	28. C
9. E	19. D	29. D
10. B	20. B	30. C

DMDOMA-33