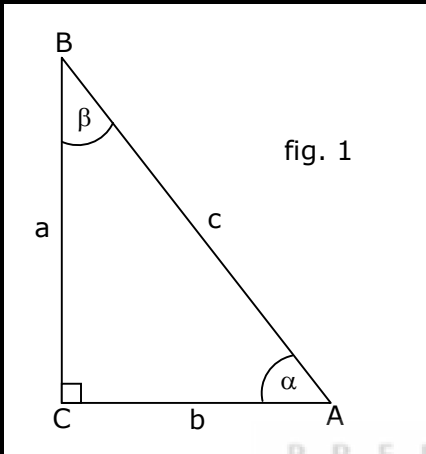


**UNIDAD: GEOMETRÍA
 TRIGONOMETRÍA**

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

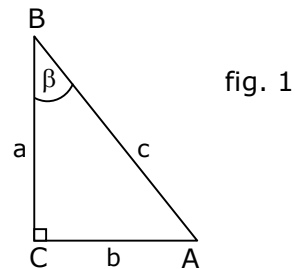
En el triángulo ABC, rectángulo en C (figura 1), se definen las siguientes razones:

 <p>fig. 1</p>	Seno de $\alpha = \mathbf{sen \alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
	Coseno de $\alpha = \mathbf{cos \alpha} = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
	Tangente de $\alpha = \mathbf{tg \alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$
	Cotangente de $\alpha = \mathbf{cotg \alpha} = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$
	Secante de $\alpha = \mathbf{sec \alpha} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$
	Cosecante de $\alpha = \mathbf{cosec \alpha} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$

EJEMPLOS

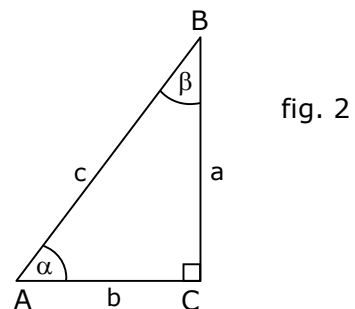
1. De acuerdo al triángulo ABC de la figura 1, ¿qué relación es falsa?

- A) $\text{sen } \beta = \frac{b}{c}$
- B) $\text{cos } \beta = \frac{a}{c}$
- C) $\text{cotg } \beta = \frac{a}{b}$
- D) $\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$
- E) $\text{sec } \beta = \frac{c}{b}$



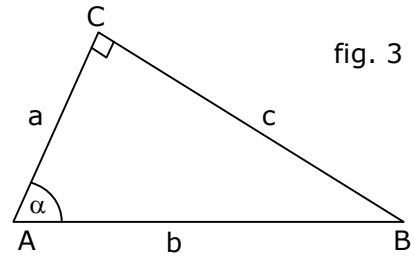
2. Con respecto al triángulo rectángulo ABC de la figura 2, ¿cuál de las opciones siguientes es verdadera?

- A) $\text{sec } \beta = \frac{c}{b}$
- B) $\text{cos } \alpha = \frac{a}{c}$
- C) $\text{cotg } \beta = \frac{a}{b}$
- D) $\text{cosec } \alpha = \frac{c}{b}$
- E) $\text{sen } \beta = \text{cos } \beta$



3. Con los datos de la figura 3, la expresión $\cotg (90 - \alpha) - \sen \alpha$ es igual a

- A) $\frac{ac - bc}{ab}$
- B) $\frac{ac - bc}{bc}$
- C) $\frac{bc - ac}{ab}$
- D) $\frac{bc - ac}{bc}$
- E) $\frac{a - c}{b}$

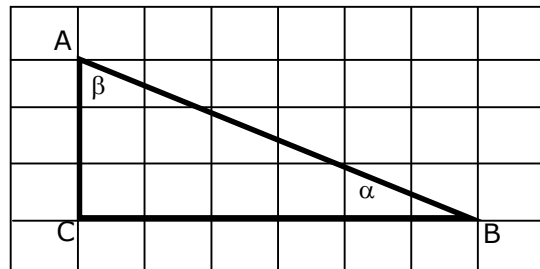


4. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 cm y 15 cm, entonces el seno del ángulo agudo menor es

- A) $\frac{15}{17}$
- B) $\frac{8}{17}$
- C) $\frac{8}{15}$
- D) $\frac{15}{8}$
- E) $\frac{17}{15}$

5. En la hoja cuadrículada de la figura 4, cada cuadrado tiene lado 2. Entonces, el valor de la expresión $\tg \alpha \cdot \ctg \beta$ es

- A) 0
- B) 0,5
- C) 2
- D) 0,25
- E) 4

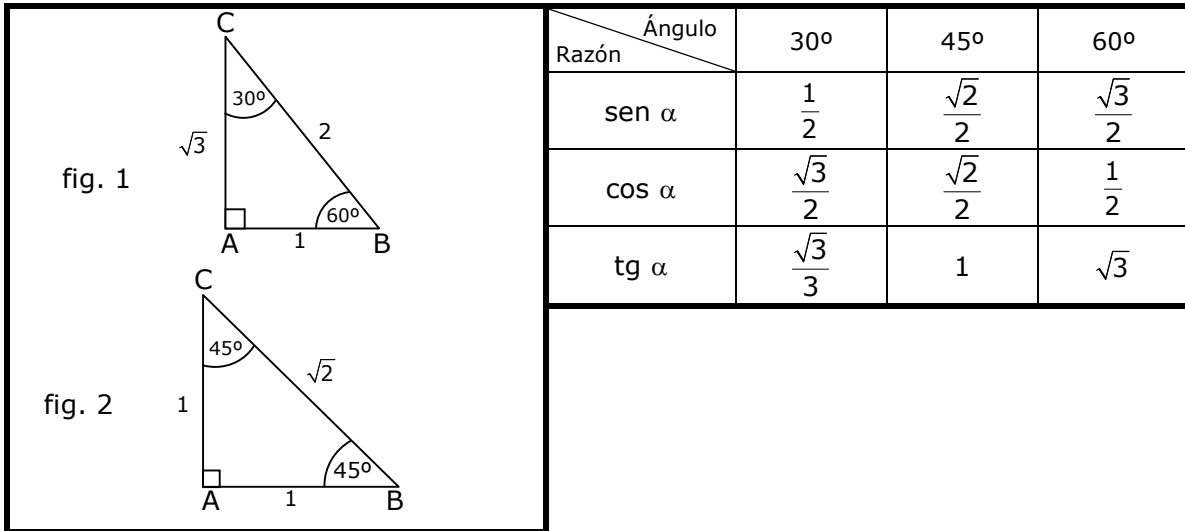


6. Si $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, entonces $\cotg \alpha =$

- A) $\frac{17}{8}$
- B) $\frac{17}{15}$
- C) $\frac{15}{8}$
- D) $\frac{15}{17}$
- E) $\frac{8}{15}$

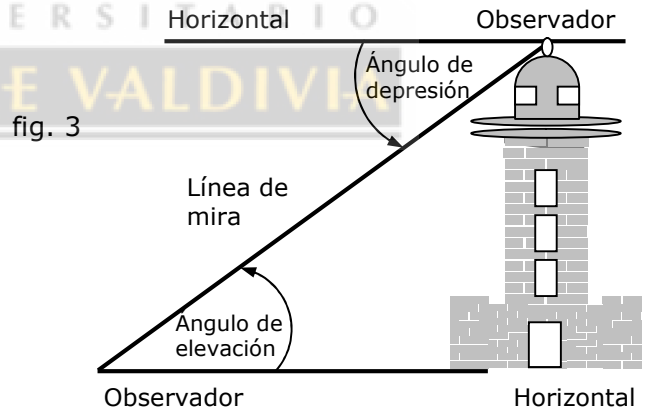
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS DE 30°, 45° y 60°

Considerando los triángulos de las figuras 1 y 2, se tiene que:



Ángulos de **elevación** y de **depresión** (fig. 3) son aquellos formados por la horizontal, considerada a nivel del ojo del observador y la línea de mira, según que el objeto observado esté por sobre o bajo esta última.

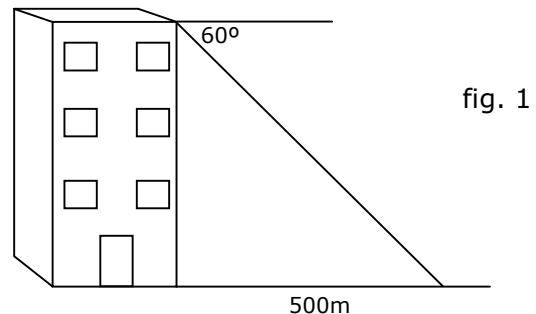
Con respecto a un observador, los ángulos de elevación y de depresión constituyen ángulos alternos internos entre paralelas, por lo tanto, sus medidas son iguales



EJEMPLOS

- Desde la punta de un edificio el hombre araña lanza una tela a 500 metros (fig. 1) de la base del edificio con un ángulo de depresión de 60°, ¿Qué altura (h), tiene el edificio?

- A) $500\sqrt{3}$ metros
- B) 500 metros
- C) $\frac{1.000}{\sqrt{3}}$ metros
- D) $\frac{100}{\sqrt{3}}$ metros
- E) $\frac{500}{\sqrt{3}}$ metros



2. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 50 m de altura (fig. 2) cuando el sol se ha elevado 45° sobre el horizonte?

- A) $50 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$ m
 B) 50°
 C) $\frac{50^\circ}{\operatorname{cos} 45^\circ}$ m
 D) $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{50^\circ}$
 E) 50 m

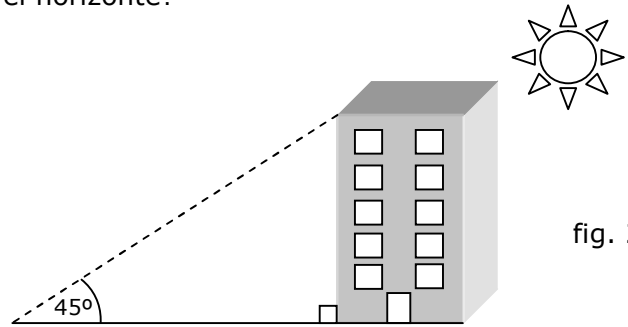


fig. 2

3. ¿Cuál es la longitud del hilo que sujeta el volantín de la figura 3, si el ángulo de elevación es de 60° ?

- A) $20\sqrt{3}$ m
 B) 31,5 m
 C) 63 m
 D) $10\sqrt{3}$ m
 E) $10\sqrt{2}$ m

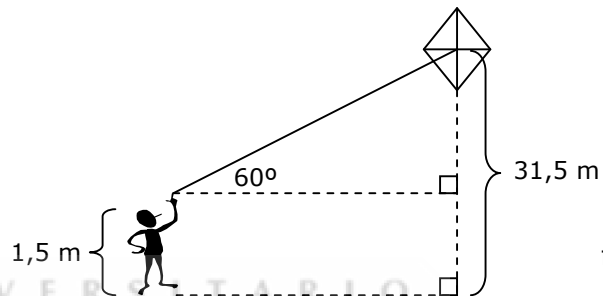


fig. 3

4. Un observador de 1,80 m observa la azotea de un edificio, según un ángulo de elevación de 30° (fig. 4). Si el punto de observación está a 24 m del edificio, ¿cuánto mide la altura del edificio?

- A) 24 m
 B) $(8\sqrt{3} + 1,8)$ m
 C) $8\sqrt{3}$ m
 D) $(12\sqrt{3} + 1,8)$ m
 E) $(24\sqrt{3} + 1,8)$ m

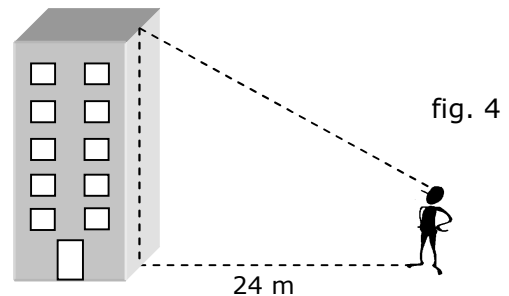


fig. 4

5. La longitud de una escalera, cuyos extremos están apoyados a un poste y al suelo es de $4\sqrt{3}$ metros. La escalera forma un ángulo con el poste de 60° . ¿A qué distancia está el pie de la escalera del poste?

- A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ m
 B) 4 m
 C) 6 m
 D) $2\sqrt{3}$ m
 E) $6\sqrt{3}$ m

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Las identidades 1, 2, 3, 4 y 5 se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas. La identidad 6, se deduce combinando las definiciones con el Teorema de Pitágoras.

	1. $\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$	4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$
	2. $\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$	5. $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$
	3. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$	6. $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$

EJEMPLOS

1. Si $k = \operatorname{cos}^2 60^\circ + \operatorname{cos}^2 50^\circ + \operatorname{sen}^2 50^\circ$, entonces $8k$ es igual a

- A) 1,25
- B) 8
- C) 6
- D) 12,5
- E) 10



2. Si α y β son ángulos complementarios, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) identidad(es)?

- I) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \beta = 1$
- II) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta$
- III) $(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha) = 1 - 2\operatorname{cos}^2 \alpha$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo II y III
- E) I, II y III

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa al cuadrado del seno de α ?

- A) $\operatorname{cos} \alpha^2$
- B) $\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$
- C) $1 + \operatorname{sen}^2 \alpha$
- D) $\frac{1}{\operatorname{sec}^2 \alpha}$
- E) $\operatorname{sen}^2 \alpha - 1$

4. Si $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$, entonces $3 \sin^2 \alpha =$

- A) $\frac{5}{9}$
- B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- C) $\frac{5}{3}$
- D) $\sqrt{5}$
- E) 5

5. Con los datos de la figura 1, la expresión $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ es igual a

- A) 1
- B) $\frac{b^2 + 2ac}{b^2}$
- C) $b^2 + 2ac$
- D) $\frac{b^2 - 2ac}{b^2}$
- E) $\frac{2ac}{b^2}$

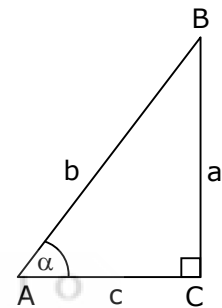


fig. 1

6. Si β es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) identidad(es)?

- I) $\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = \operatorname{sec}^2 \beta$
- II) $\frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{sen} \beta}{1 - \operatorname{cos}^2 \beta} = \operatorname{sec} \beta$
- III) $\operatorname{cosec} \beta \cdot \operatorname{sen} \beta = \operatorname{cos} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y II
- E) I, II y III

7. ¿En cuál(es) de las siguientes expresiones trigonométricas, el resultado es **siempre** igual a 1?

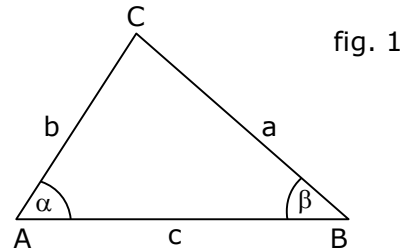
- I) $\operatorname{sen}^2 40^\circ + \operatorname{cos}^2 50^\circ$
- II) $\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ$
- III) $\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{cos} 60^\circ$

- A) En II solamente
- B) En III solamente
- C) En I y en II solamente
- D) En II y en III solamente
- E) Ninguna de ellas

EJERCICIOS

1. En el triángulo rectángulo en C de la figura 1, $\operatorname{sen} \beta - \operatorname{cos} \alpha$ es igual a

- A) 0
- B) $\frac{b^2 - a^2}{ab}$
- C) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$
- D) $\frac{a - b}{c}$
- E) $\frac{b - a}{c}$



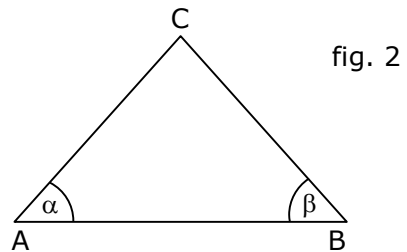
2. Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ y α es un ángulo agudo, entonces $\operatorname{sec} \alpha =$

- A) $\frac{12}{5}$
- B) $\frac{13}{12}$
- C) $\frac{5}{12}$
- D) $\frac{5}{13}$
- E) $\frac{12}{13}$



3. El triángulo ABC de la figura 2, es rectángulo en C. Si $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$ y $\overline{BC} = 3\sqrt{5}$ cm, ¿cuánto es $\operatorname{cos} \beta$?

- A) 1,25
- B) 1
- C) 0,8
- D) 0,75
- E) 0,6

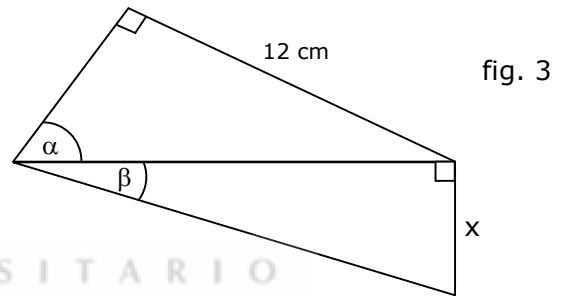


4. $\cos^2 60^\circ - \operatorname{tag} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen}^2 30^\circ =$

- A) $-\frac{3}{4}$
- B) $-\frac{1}{4}$
- C) 0
- D) $\frac{1}{4}$
- E) $\frac{3}{4}$

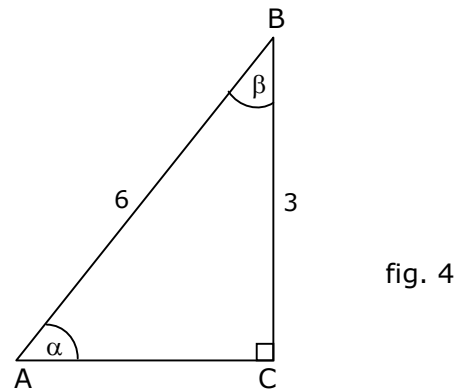
5. En la figura 3, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{tg} \beta = 0,5$, entonces x mide

- A) 3 cm.
- B) 7,5 cm.
- C) 9 cm.
- D) 12 cm.
- E) 30 cm.



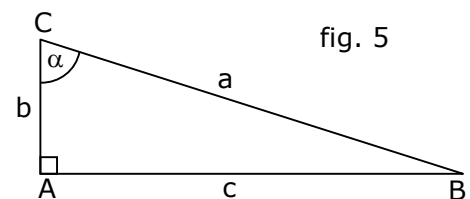
6. El triángulo de la figura 4, es rectángulo en C. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

- I) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$
 - II) $\cos \beta = \frac{1}{2}$
 - III) $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$
- A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo III
 - D) Sólo I y III
 - E) I, II y III



7. En la figura 5, $\operatorname{sen} \alpha = 0,25$ y $b = 15$ cm. Entonces, ¿cuál es la medida del cateto AB?

- A) 60 cm
- B) 15 cm
- C) $\sqrt{15}$ cm
- D) $4\sqrt{15}$ cm
- E) $\frac{15}{4}$ cm



8. Javier tiene un volantín sujeto por un hilo tenso de 160 m de longitud con un ángulo de elevación es de 40° . Un árbol está justo debajo del volantín. ¿A qué distancia está el árbol de Javier?

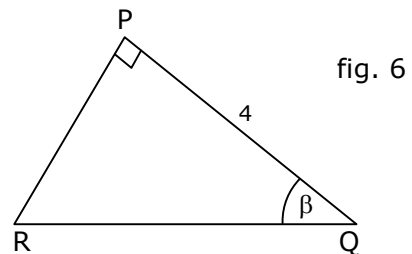
- A) $160 \cdot \text{sen } 40^\circ \text{ m}$
- B) $160 \cdot \text{tg } 50^\circ \text{ m}$
- C) $160 \cdot \text{cos } 40^\circ \text{ m}$
- D) $160 \cdot \text{sec } 40^\circ \text{ m}$
- E) $160 \cdot \text{sec } 50^\circ \text{ m}$

9. En un triángulo rectángulo, ¿cuál de las siguientes expresiones **no** representa a la tangente de un ángulo agudo δ ?

- A) $\frac{\text{sen } \delta}{\text{cos } \delta}$
- B) $\frac{\text{sec } \delta}{\text{cosec } \delta}$
- C) $\text{Cotg } (90 - \delta)$
- D) $\frac{\text{cosec } \delta}{\text{sec } \delta}$
- E) Ninguna de las anteriores

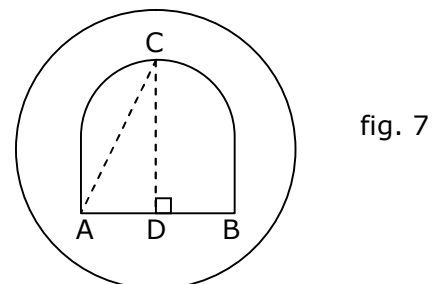
10. En la figura 6, el $\triangle PQR$ es rectángulo en P. Si $PQ = 4 \text{ cm}$ y su área es 10 cm^2 , entonces $\text{cosec } \beta =$

- A) $\frac{5}{\sqrt{41}}$
- B) $\frac{4}{\sqrt{41}}$
- C) $\frac{5}{4}$
- D) $\frac{\sqrt{41}}{5}$
- E) $\frac{\sqrt{41}}{4}$



11. La figura 7, muestra un corte transversal de un túnel. La altura de éste es $3\sqrt{3} \text{ m}$ y el ángulo de elevación desde el extremo A de la base al punto C de mayor altura es de 60° . ¿Cuál es la medida del ancho del túnel?

- A) 6 m
- B) $6\sqrt{3} \text{ m}$
- C) 3 m
- D) 9 m
- E) $4\sqrt{3} \text{ m}$



12. Un alpinista que baja por una ladera, recorre el doble de metros de los que baja. Entonces, el ángulo de inclinación de la ladera es
- A) 15°
 B) 30°
 C) 45°
 D) 60°
 E) 75°

13. En la circunferencia de centro O y radio r de la figura 8, la longitud de la cuerda \overline{AB} está dada por

- A) $2 \cdot r \cdot \sin 20^\circ$
 B) $2 \cdot r \cdot \cos 20^\circ$
 C) $2 \cdot r \cdot \sin 70^\circ$
 D) $r \cdot \sin 40^\circ$
 E) $r \cdot \cos 70^\circ$

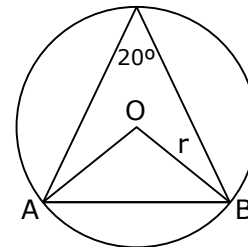


fig. 8

14. La base de un triángulo isósceles tiene una longitud de 12 cm y el coseno del ángulo adyacente a ella es $\frac{3}{5}$. Luego, el área del triángulo es

- A) 16 cm^2
 B) 24 cm^2
 C) 32 cm^2
 D) 48 cm^2
 E) 64 cm^2

15. El triángulo de la figura 9 es isósceles de base \overline{AB} , el $\angle ACB$ mide 80° , \overline{CD} es altura y $\overline{AB} = 24 \text{ cm}$. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) verdadera (s)?

- I) $\overline{AC} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \text{ cm}$
 II) $\overline{BC} = \frac{12}{\cos 50^\circ} \text{ cm}$
 III) $\overline{BC} = 12 \cdot \text{tg } 50^\circ \text{ cm}$

- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo III
 D) Sólo I y II
 E) I, II y III

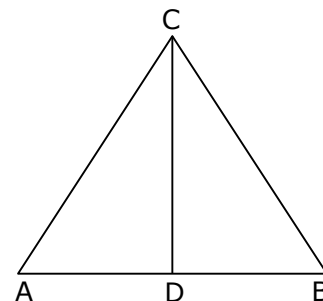


fig. 9

16. Si β es un ángulo agudo de un $\triangle ABC$, rectángulo en C , $m = a^2 \cdot \text{sen}^2 \beta$ y $n = a^2 \cdot \text{cos}^2 \beta$, entonces $m^2 + 2mn + n^2 =$
- A) a^2
 B) a
 C) 1
 D) a^4
 E) -1

17. Un pájaro despegar con un ángulo de elevación de 30° . Si su vuelo es en línea recta, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) la distancia recorrida por el pájaro cuando alcanza los 2.000 m de altura?

- I) $\frac{2.000}{\text{sen } 30^\circ}$ m
 II) $\frac{2.000}{\text{cos } 60^\circ}$ m
 III) $2.000 \cdot \text{tg } 30^\circ$ m

- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo III
 D) Sólo I y II
 E) Sólo I y III

18. Un camión al chocar con un poste lo quiebra y la punta de éste toca el suelo a una distancia de 3 m de la base de él. Si la parte superior del poste quebrado forma con el suelo un ángulo de 45° , ¿cuál era la altura del poste desde la quebradura hasta la cima del poste?

- A) $(6 + 3\sqrt{2})$ m
 B) $6\sqrt{2}$ m
 C) $(3 + 3\sqrt{2})$ m
 D) $3\sqrt{2}$ m
 E) $(3 + 1,5\sqrt{2})$ m

19. En la circunferencia de centro O y radio r de la figura 11, la cuerda \overline{AB} , mide $2c$. Entonces, $\text{sen } \alpha =$

- A) $r \cdot c$
 B) $\frac{c}{r}$
 C) $\frac{2c}{r}$
 D) $\frac{r}{2c}$
 E) $\frac{r}{c}$

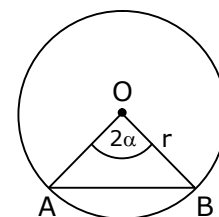
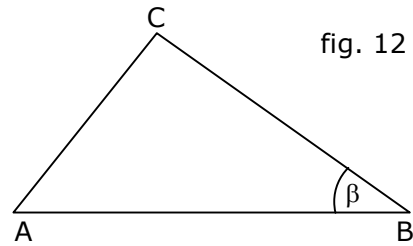


fig. 11

20. En la figura 12, el triángulo ABC es rectángulo en C y $\text{tg } \beta = \frac{2}{3}$. Si $\overline{AB} = 5$ cm, entonces el área del triángulo ABC es

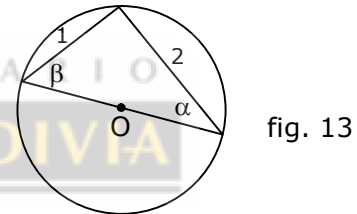
- A) 3 cm^2
 B) $2\sqrt{5} \text{ cm}$
 C) $\frac{75}{13} \text{ cm}^2$
 D) $\frac{150}{13} \text{ cm}^2$
 E) $\frac{15}{\sqrt{13}} \text{ cm}^2$



21. En la figura 13, ¿cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$
 II) $\text{sen } \alpha - \text{cos } \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 III) $\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta = \frac{5}{2}$

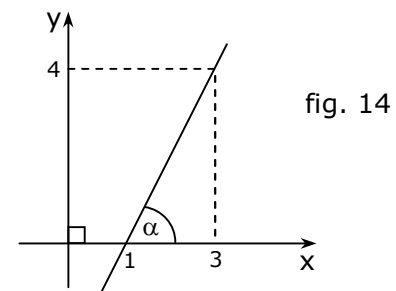
- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo III
 D) Sólo I y III
 E) I, II y III



22. Con respecto a la figura 14, ¿cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) **falsa(s)**?

- I) $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$
 II) $\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$
 III) $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$

- A) Sólo I
 B) Sólo II
 C) Sólo II y III
 D) I, II y III
 E) Ninguna de ellas



23. El vigía de un faro observa una lancha con un ángulo de depresión de 35° . Si la lancha se encuentra a una distancia de 120 m de la base del faro, ¿cuál es la altura del faro?

- A) $\frac{120}{\operatorname{tg} 35^\circ}$ m
- B) $120 \operatorname{sen} 35^\circ$ m
- C) $120 \operatorname{cos} 35^\circ$ m
- D) $\frac{\operatorname{sen} 35^\circ}{120}$ m
- E) $120 \operatorname{tg} 35^\circ$ m

24. En la circunferencia de centro O de la figura 15, está inscrito el triángulo ABC. Si $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$ y el área del triángulo es 96 cm^2 , entonces ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?

- A) 5 cm
- B) 2 cm
- C) 40 cm
- D) 10 cm
- E) 20 cm

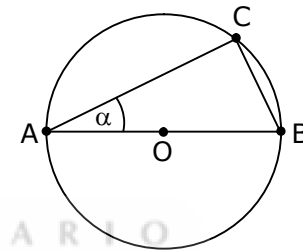


fig. 15

25. En el triángulo ABC de la figura 16, se puede determinar la medida de AC si :

- (1) $\tan \alpha = 0,75$
 - (2) el perímetro del triángulo es 24.
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

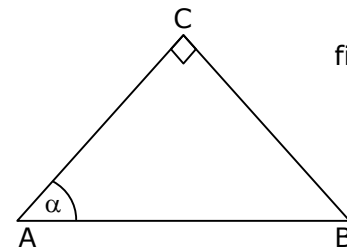


fig. 16

26. Se puede determinar el área del triángulo ABC de la figura 17, si :

- (1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
- (2) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{4}$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

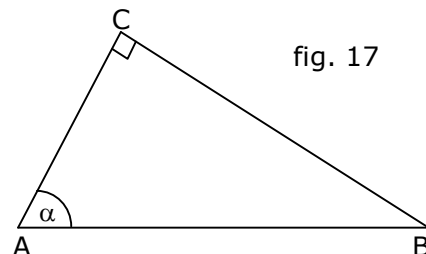


fig. 17

27. El extremo superior de una escalera se encuentra apoyado en el punto más alto de una muralla, la escalera forma con la muralla un ángulo de 30° . Se puede determinar el largo de la escalera si se conoce :

- (1) La altura del muro.
 - (2) La distancia entre la base de la escalera y el muro.
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

28. En el triángulo PQR de la figura 18, se puede calcular $\sin \alpha$ si :

- (1) $\angle QRP = 90^\circ$
 - (2) Área (ΔPQR) = 24 cm^2
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

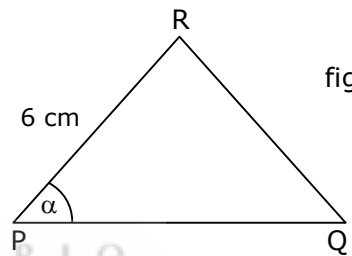


fig. 18

29. En la figura 19, $\text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$, se puede afirmar que $PR = 6$ si :

- (1) $TS = 4$, $TQ = QP$
 - (2) $\angle RPQ \cong \angle TQS$
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

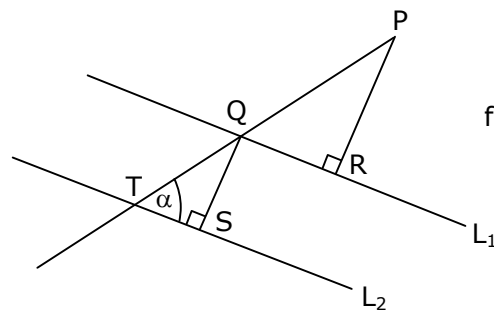


fig. 19

30. En un triángulo MNT isósceles de base \overline{MN} , la altura correspondiente a la base mide 1,8 metros. Se puede determinar el área del triángulo si :

- (1) El triángulo es de base 5,4 metros.
 - (2) La tangente correspondiente a uno de los ángulos de la base es $\frac{2}{3}$.
- A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3	4	5	6	7
1 y 2	E	C	C	B	D	E	
3 y 4	A	E	A	B	C		
5 y 6	E	D	B	C	D	D	E

EJERCICIOS PÁG. 7

1. A	11. A	21. C
2. B	12. B	22. D
3. E	13. A	23. E
4. C	14. D	24. D
5. B	15. D	25. C
6. E	16. D	26. E
7. C	17. D	27. D
8. C	18. D	28. C
9. D	19. B	29. C
10. D	20. C	30. D

DMDOMA34

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web

<http://www.pedrovaldivia.cl/>